

DISEÑO DE PLANES DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS BASADOS EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Pedro Gómez y María J. González

Como consecuencia del propósito de mejorar la formación matemática de los escolares, la reflexión sobre el diseño de programas de formación de profesores de matemáticas es de permanente actualidad en España y Latinoamérica. En este capítulo abordamos esta problemática desde la perspectiva del análisis didáctico y con base en dos fundamentos: una síntesis de las principales características del análisis didáctico en el contexto de la formación de profesores y una conceptualización parcial de los procesos de aprendizaje que tienen lugar en programas de formación basados en ese modelo.

En este capítulo presentamos algunas ideas sobre el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En la primera parte, concretamos su papel en el ámbito de la formación inicial y permanente de profesores. En la segunda parte, presentamos nuestra posición sobre el aprendizaje de los profesores en formación desde una perspectiva sociocultural y nos centramos en una cuestión específica de esa problemática: el aprendizaje de un organizador del currículo. Para abordarla, establecemos los principales usos que los profesores en formación pueden dar a los organizadores del currículo; identificamos los tres tipos de conocimiento que caracterizan su aprendizaje; y presentamos algunos resultados sobre esos procesos de aprendizaje. Con base en las ideas y resultados anteriores, en la tercera parte, proponemos algunas directrices curriculares para el diseño de planes de formación basados en el análisis didáctico y presentamos un ejemplo de un plan de formación de este tipo.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y FORMACIÓN DE PROFESORES

Con el análisis didáctico se pretende proporcionar a los profesores en formación un procedimiento sistemático para el análisis de un tema concreto de las matemáticas escolares, de tal

forma que la información que surja de ese análisis les sea útil para diseñar una unidad didáctica, fundamentar y justificar dicho diseño, y llevarlo a la práctica (Gómez, 2007) <capítulo Lupi>. Al describir el procedimiento que, de manera ideal, un profesor realizaría a la hora de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica, el análisis didáctico precisa, de manera sistemática y secuenciada, las actuaciones de ese profesor ideal. Con base en una visión funcional de la formación de profesores de matemáticas (Gómez y González, 2008), es posible entonces identificar los conocimientos y capacidades que son necesarios para realizar esas actuaciones. Estos conocimientos y capacidades caracterizan sus competencias de planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas (Gómez, 2006). Este es el conocimiento didáctico que se espera desarrollar en los planes de formación. Al permitir caracterizar el conocimiento didáctico, el análisis didáctico estructura el contenido de los planes de formación, como mostraremos más adelante.

El análisis didáctico es un procedimiento para organizar planes de formación y no implica una forma concreta en la que, una vez terminada la formación, el profesor realice su práctica docente. No obstante, la organización del plan de formación y la conceptualización del análisis didáctico sí suponen que el conocimiento didáctico desarrollado en el plan de formación le será útil al profesor en su trabajo diario. Por ejemplo, el profesor puede poner en juego su conocimiento didáctico a la hora de evaluar libros de texto o seleccionar tareas. Desde la perspectiva de la práctica diaria del profesor, el profesor puede abordar su planificación de aula poniendo en juego su conocimiento didáctico al

formular (y responder en el tiempo que tenga disponible) preguntas del estilo (Gómez, 2004, pp. 88-89): ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática?... ¿Qué dificultades hemos percibido que los escolares muestran cuando abordan el tema?... ¿Qué tareas son relevantes para los objetivos de aprendizaje que queremos que logren nuestros alumnos y para las dificultades que esperamos que superen?... (Gómez, 2007, pp. 98-99)

Algunos estudios ya han contrastado esta conjetura (Gómez, 2011) <capítulo María del Mar>. Por otro lado, el análisis didáctico produce una planificación a priori que, como cualquier planificación, puede y debe ser revisada a la luz de la práctica. El conocimiento didáctico que el profesor desarrolla en el plan de formación también le prepara para tomar decisiones en la práctica, con base en análisis didácticos “sobre la marcha”, cuando las actuaciones de los escolares o el contexto no corresponden a sus previsiones (Gómez, 2007, pp. 86-87) <capítulo Gabriela>. Adicionalmente, se espera que los profesores en formación desarrollen un conocimiento didáctico que les permita producir diseños de unidades didácticas; justificar ese diseño en términos de su relevancia —acorde con los requerimientos del contexto—, eficacia —en logro de los objetivos propuestos— y eficiencia —en el uso de los recursos— (González, Moreno, Gil, Gómez, Lupiáñez, Rico *et al.*, 2006); y verificar la calidad del diseño en la práctica, de cara a mejorarlo.

ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO Y TÉCNICAS DE ANÁLISIS

En este apartado abordamos la problemática del uso de los organizadores del currículo dentro de un plan de formación. Un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en

el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46). La mayoría de los organizadores del currículo no tienen un único significado dentro de la literatura de la Educación Matemática. Dos ejemplos de interpretaciones de la noción de sistema de representación son las de Duval (1998a, 1998b) y Kaput (1992). Lo mismo sucede con la idea de fenomenología (e.g., Gómez y Cañadas, 2011; Puig, 1997; Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008). Una vez que los formadores han fijado un significado de un organizador del currículo, surge la pregunta acerca de cómo los profesores en formación pueden utilizar esa noción. Desde nuestra perspectiva funcional de la formación de profesores, la actividad del profesor en formación se centra en el uso de los organizadores del currículo como herramientas conceptuales y metodológicas de las que surgen conjuntos de técnicas que permiten realizar dos tipos de tareas: (a) analizar el tema matemático y (b) usar la información que resulta de ese análisis ya sea en otros análisis o en la planificación de una clase o unidad didáctica.

El uso de un organizador del currículo para analizar un tema de las matemáticas escolares no es evidente. La caracterización del organizador del currículo no da necesariamente pautas explícitas de cómo usarlo para producir información relevante sobre el tema ni de cómo utilizar dicha información para tomar decisiones en el proceso de planificación. Es necesario considerar las ideas clave, las relaciones y las propiedades que establecen su significado y buscar formas de instrumentalizar estas ideas. En otras palabras, es necesario establecer técnicas que permitan guiar el proceso de análisis. Es labor de quien diseña e implementa un plan de formación el identificar y configurar estas técnicas.

Para referirnos a estas técnicas de análisis nos apoyamos en las ideas de Artigue (2002, pp. 248-249) que, aunque han sido desarrolladas en el contexto de la informática educativa, se pueden adaptar al aprendizaje de un organizador del currículo. Usamos el término *técnica* en su sentido más usual, como un conjunto de procedimientos para realizar una tarea. Para un organizador del currículo, la tarea consiste en producir o usar información sobre el tema analizado. Las técnicas se organizan, explican y justifican en torno a un discurso tecnológico. Este es el discurso que el formador organiza a la hora de explicar y sugerir procedimientos que indican cómo usar un organizador del currículo para analizar el tema. Además, la estructura del discurso tecnológico se estructura con base en la teoría. Es así como, por ejemplo, las técnicas para realizar la tarea de producir información sobre la estructura conceptual de un tema —i.e., listados de conceptos y procedimientos y su organización en un mapa conceptual— se fundamentan en el significado del organizador del currículo —la teoría—: la organización cognitiva de los temas de las matemáticas escolares en la dualidad conceptual-procedimental y la necesidad de relacionar estructuradamente esos elementos. Entonces, una técnica es un procedimiento que permite usar el significado de un organizador del currículo para producir o usar información sobre el tema analizado. Las técnicas pueden ser variadas y complejas. Aunque el valor principal de las técnicas es funcional —su potencialidad para producir información relevante— tienen también un valor epistémico —se relacionan con el significado del organizador del currículo—. En lo que sigue, nos basaremos en las ideas de significado y de técnica para conceptualizar algunos aspectos del aprendizaje del análisis didáctico.

APRENDER ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este apartado consideramos algunas cuestiones relacionadas con el aprendizaje de los profesores en formación en planes que se articulan alrededor del análisis didáctico, con base en

trabajos que hemos venido realizando recientemente (Gómez y González, 2009) y (González y Gómez, En preparación). En los apartados anteriores hemos mostrado que el análisis didáctico se utiliza como marco de referencia en planes de formación de profesores porque se supone que el conocimiento didáctico que los profesores en formación desarrollan en esos planes les será útil en su ejercicio profesional. El conocimiento didáctico, además de involucrar el conocimiento teórico de los organizadores del currículo, también implica el conocimiento técnico necesario para analizar un tema con los organizadores del currículo y el conocimiento práctico que permite usar la información que surge de esos análisis con un propósito didáctico. Por consiguiente, el conocimiento didáctico no es un conocimiento que se pueda aprender con base en un esquema de transmisión y recepción de información. Por estas razones, asumimos una posición sociocultural del aprendizaje (Gómez y Rico, 2007; Wenger, 1998) en virtud de la cual supondremos, de aquí en adelante, que los profesores aprenden cuando (a) trabajan en grupo, sobre un tema matemático concreto; (b) negocian significados y llegan a acuerdos para presentar el resultado de su trabajo a los compañeros periódicamente; (c) interpretan y reaccionan a los comentarios de los tutores y formadores; y (d) comparan su trabajo con el de los demás grupos, negocian significados con ellos, y comentan y critican esos trabajos.

Nosotros esperamos que, con el propósito de desarrollar su conocimiento didáctico y en relación con un tema de las matemáticas escolares, los profesores en formación sean capaces de

1. analizar el tema con cada organizador del currículo a efectos de producir información sobre el tema que sea útil para otros análisis o para el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica;
2. usar la información producida por otros organizadores del currículo en nuevos análisis o en el diseño de la unidad didáctica; y
3. organizar y relacionar la información recogida para proponer un diseño fundamentado y justificado, y para diseñar y ejecutar los protocolos de implementación y evaluación de la unidad didáctica.

El tercer punto involucra el uso coordinado de varios organizadores del currículo y encierra problemas de investigación abiertos que estamos apenas comenzando a abordar. En este apartado nos centramos en algunos aspectos de los dos primeros puntos. Concretamente, nos hacemos dos preguntas:

- ◆ ¿Qué se espera que un profesor en formación aprenda en relación con un organizador del currículo?
- ◆ ¿Cómo aprende?

Usaremos las respuestas que demos a estas preguntas para fundamentar nuestras propuestas acerca del diseño de planes de formación que hacemos más adelante.

Tres tipos de conocimiento sobre los organizadores del currículo

Las reflexiones que hemos hecho hasta ahora nos permiten aproximarnos al conocimiento de los organizadores del currículo desde tres perspectivas: (a) el futuro profesor necesita cierta comprensión del organizador del currículo para (b) usarlo al analizar un concepto matemático y producir una información que, a su vez, (c) puede ser utilizada, posiblemente en conjunción con la información proveniente de otros organizadores del currículo, con un propósito didáctico.

tico concreto (González y Gómez, 2008, p. 428). Estos aspectos establecen tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo:

1. Conocer alguna descripción teórica del organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sea capaz de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares.
2. Conocer las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema.
3. Conocer las técnicas necesarias para usar la información obtenida sobre el tema para tomar decisiones a la hora de analizarlo con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica.

Llamamos a estos tres tipos de conocimiento *significado*, *uso técnico* y *uso práctico* de un organizador del currículo. Corresponden, dentro del contexto que nos ocupa, a las tres categorías aristotélicas —*episteme*, *techne* y *frónesis*— (Aristóteles, 1984), que han sido adoptadas y adaptadas por diversos autores para referirse al conocimiento del profesor y para explorar la dualidad entre la teoría y la práctica en la formación de profesores (Back, 2002; Saugstad, 2005). El *episteme* se refiere al conocimiento científico; es universal, invariable e independiente del contexto. Tanto el *techne* como la *frónesis* son conocimientos prácticos, variables y dependientes del contexto. Mientras que el *techne* se orienta hacia la producción y persigue un objetivo, la *frónesis* se orienta hacia la acción e involucra la deliberación (Flyvbjerg, 2006, p. 361).

El significado de un organizador del currículo corresponde al *episteme*: es el conocimiento teórico que emerge de la base disciplinar de la Educación Matemática; una vez fijado en el plan de formación, es universal e independiente del contexto. El uso técnico y el uso práctico son conocimientos de tipo práctico, variables y dependientes del contexto —del tema y de la situación de enseñanza que se pretende—. El uso técnico, como el *techne*, está orientado hacia la producción de información sobre el tema analizado. El uso práctico, como la *frónesis*, está orientado hacia la acción; es el conocimiento que le permite al profesor en formación usar la información que surge del uso técnico para tomar decisiones cuando realiza otros análisis o cuando diseña la unidad didáctica y justifica ese diseño. Tanto el uso técnico, como el uso práctico involucran técnicas e implican un discurso tecnológico, mientras que el significado corresponde a la teoría que sustenta ese discurso tecnológico.

El hecho de que la teoría y las tecnologías de un organizador del currículo sean discursos que deben ser enseñados y aprendidos, resalta las dos preguntas que guían este apartado: qué y cómo se aprende un organizador del currículo. A continuación, caracterizamos las ideas de significado, uso técnico y uso práctico y las ejemplificamos con el organizador del currículo fenomenología.

Significado, uso técnico y uso práctico: lo que se espera que aprenda el profesor en formación

Nuestro propósito en este apartado consiste en caracterizar qué es lo que nosotros —como formadores— esperamos que los profesores en formación aprendan acerca del significado, el uso técnico y el uso práctico de un organizador del currículo.

Significado

El significado de un organizador del currículo es específico a un programa de formación. Se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado —porque la consideran útil para la planificación— como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estas ideas clave caracterizan el significado del organizador del currículo como conocimiento teórico y lo diferencian de los significados que el término puede tener por fuera de la Educación Matemática o en el lenguaje común. A continuación, ejemplificamos esta caracterización de la idea de significado para el organizador del currículo fenomenológica.

La fenomenología involucra las ideas de fenómeno, nivel de generalidad de un fenómeno, contexto, característica estructural, subestructura, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta. Estos conceptos y sus relaciones se describen en detalle en Gómez y Cañadas (2011) y Gómez (2007, pp. 50-55). En su sentido básico, la fenomenología es el estudio de los fenómenos. Pero el análisis fenomenológico —como procedimiento de análisis relativo a la fenomenología— no consiste únicamente en identificar fenómenos que den sentido a un tema de las matemáticas escolares. Consiste también en establecer las maneras como el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Si tomamos la función cuadrática como ejemplo de un tema de las matemáticas escolares, entonces podemos basarnos en las ideas clave que caracterizan el organizador del currículo y pensar en problemas a los que este tema da respuesta o en usos del tema para identificar fenómenos; la antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos son ejemplos de fenómenos relacionados con la función cuadrática. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural que surge de un principio de la Física. Su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—. Por lo tanto, las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno o grupo de fenómenos que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema. Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Subestructuras y contextos son dos formas —la primera matemática, la segunda fenomenológica— de establecer las maneras en las que el tema organiza los fenómenos que le dan sentido. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen. Los fenómenos que son del tipo de reflector parabólico pueden referirse a situaciones personales —mis gafas—, laborales —los focos del edificio donde trabajo—, científicas —un microscopio— y públicas —las antenas del sistema de telefonía móvil—. Estos conceptos y su relación configuran el significado de este organizador del currículo (ver Figura *, más adelante).

Uso técnico

El análisis de un tema con un organizador del currículo requiere que se ponga en juego su significado. En general, este proceso implica instrumentalizar las ideas claves que lo caracterizan, configurando técnicas que permitan producir información sobre el tema. Estas técnicas deben entonces satisfacer dos condiciones: (a) estar basadas en el significado del organizador del currículo y (b) dar lugar a la producción de información sobre el tema analizado que pue-

da ser usada en la planificación. Entre la variedad de técnicas que satisfacen estas condiciones, los formadores escogen y proponen aquellas que consideran más eficaces y eficientes para el análisis del tema. Las técnicas que caracterizan el uso técnico de un organizador del currículo dependen del organizador del currículo y del tema. Es decir, el uso técnico es un conocimiento orientado hacia la producción, variable y dependiente del contexto. A continuación, caracterizamos, de manera general, el uso técnico del organizador del currículo fenomenología, cuyo significado establecimos en el apartado anterior.

El análisis fenomenológico de un tema implica dos tareas: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Cada una de estas tareas involucra técnicas que surgen del significado del organizador del currículo. Para identificar fenómenos, se requieren técnicas que permitan distinguir aquellos fenómenos que corresponden al tema de aquellos que no corresponden. Para ello, se puede formular preguntas como “¿resuelve el tema un problema relacionado con el fenómeno y se usa el tema en algún aspecto de este fenómeno?”. Hemos usado estas técnicas para identificar algunos fenómenos que dan sentido a la función cuadrática. Hacerse las preguntas, “¿qué otros fenómenos son ‘parecidos’ a este, desde la perspectiva del tema, y en qué son parecidos?” es una técnica para establecer grados de generalidad de los fenómenos identificados, aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. De esta forma podemos identificar los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. La identificación de contextos implica entonces dos técnicas relacionadas con tres preguntas que se pueden formular con respecto al tema: (a) ¿en qué se usa el tema?; (b) ¿qué tipos de problemas resuelve el tema?; y (c) ¿qué características comparten los fenómenos que dan sentido al tema? Estas preguntas configuran técnicas que se orientan a identificar los fenómenos que se organizan en un mismo contexto. Por otro lado, las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. Esto es lo que hacemos al identificar la propiedad física que comparten los reflectores parabólicos y establecer su relación con la subestructura matemática que define las propiedades del foco de la parábola. Pero también es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para al menos un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos. Este sería el caso de identificar el modelo $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ como

subestructura que organiza todos los fenómenos de movimiento de cuerpos en un campo de fuerza uniforme. Finalmente, se hace necesario desarrollar técnicas para presentar los resultados del análisis e incluir la organización de los fenómenos en términos de situaciones. La Figura * describe esquemáticamente las ideas clave y algunas de las técnicas del uso técnico del análisis fenomenológico.

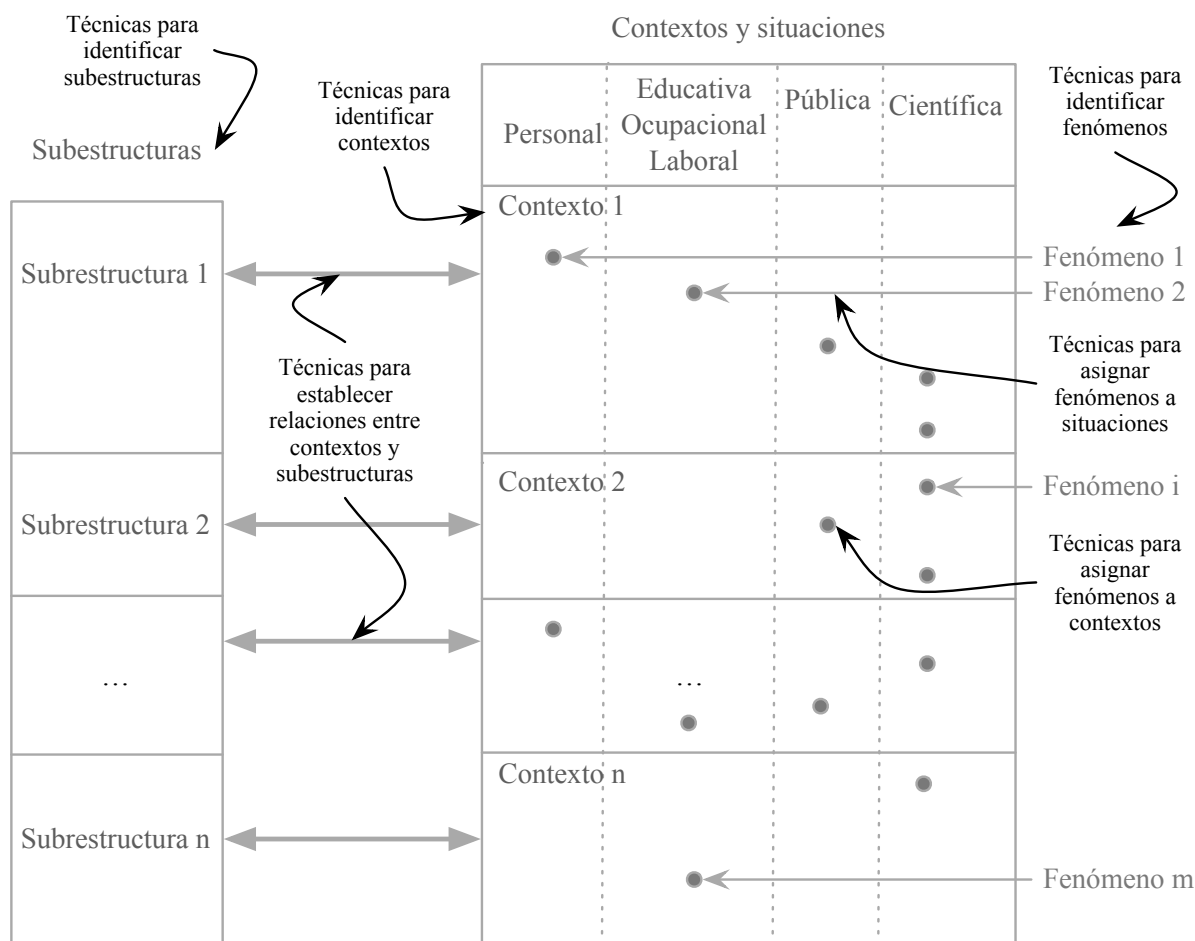


Figura *. Ideas clave y técnicas del uso técnico en el análisis fenomenológico

Las técnicas descritas nos permiten establecer fenómenos, contextos, características estructurales, subestructuras y situaciones y relacionar estos elementos entre ellos. Para el ejemplo de la función cuadrática, una subestructura es aquella que establece las propiedades del foco de la parábola. Identificamos esta subestructura cuando reconocimos que las características estructurales de los reflectores parabólicos configuran un contexto y que este contexto se relaciona con esa subestructura. En ese contexto se incluye como fenómeno los focos de los coches. Este es un fenómeno ubicado en una situación pública.

Uso práctico

La información que surge del uso técnico de un organizador del currículo ha de ser útil en la planificación. Llamamos uso práctico de un organizador del currículo al conjunto de técnicas que satisfacen las siguientes condiciones: (a) usan la información que surge del uso técnico y (b) permiten tomar decisiones acerca de la planificación. Estas decisiones tienen lugar, ya sea cuando se analiza el tema con otros organizadores del currículo, o cuando se analizan y seleccionan tareas para la planificación. Entre la variedad de técnicas que satisfacen estas condiciones, los formadores escogen y proponen aquellas que consideran más eficaces y eficientes para el proceso de planificación. Como el uso técnico, el uso práctico es un conocimiento de tipo práctico. En este caso está orientado a la acción: se trata de tomar decisiones

para la planificación con base en la información que surge del uso técnico. Describimos a continuación algunos aspectos del uso práctico del organizador del currículo fenomenología.

El análisis fenomenológico no se realiza exclusivamente como un ejercicio intelectual. La información que surge del análisis fenomenológico —los fenómenos que dan sentido al tema y su organización— pueden y deben ser utilizados en otras fases del análisis didáctico. Una visión funcional de las matemáticas escolares requiere que el profesor tenga en cuenta la funcionalidad del tema —como herramienta para resolver problemas— en la formulación de expectativas de aprendizaje y en el análisis y selección de tareas. Por consiguiente, cuando realiza el análisis cognitivo, el profesor en formación puede utilizar la información que surge del análisis fenomenológico para formular expectativas de aprendizaje e identificar limitaciones de aprendizaje que destaquen el carácter funcional del tema. En este caso, las técnicas pueden ser de verificación de listados. Preguntas como “¿tienen en cuenta las expectativas de aprendizaje que he formulado y las limitaciones que he identificado las cuestiones claves que identifique en el análisis fenomenológico?” dan lugar a técnicas para el uso del análisis fenomenológico en el análisis cognitivo. De manera similar, a la hora de analizar y seleccionar tareas para la unidad didáctica, el profesor puede usar la información que surge del análisis fenomenológico para responder preguntas como “¿cómo identificar problemas apropiados para un aspecto concreto del tema?” Al tener organizados los fenómenos en términos de subestructuras y contextos, el profesor puede identificar fenómenos que den sentido a un aspecto del tema y formular tareas que, con base en ese fenómeno, pongan en juego ese aspecto. Puede también utilizar la organización de los fenómenos de acuerdo con las situaciones para establecer aquellos fenómenos y tareas que considere más apropiados para el contexto en el que está trabajando.

Balance del significado, el uso técnico y el uso práctico de un organizador del currículo

La figura * resume las ideas que acabamos de presentar. El significado del organizador del currículo que se espera que los profesores en formación desarrollen es una opción que los formadores han seleccionado de la literatura en Educación Matemática. Las ideas clave que configuran ese significado dan lugar a técnicas para el análisis del tema —uso técnico—. La información que surge de ese análisis se usa con propósitos didácticos con base en otras técnicas —uso práctico—. En el siguiente apartado presentamos algunos resultados de investigación que nos orientan sobre el modo en que los profesores en formación aprenden el significado, el uso técnico y el uso práctico de un organizador del currículo.

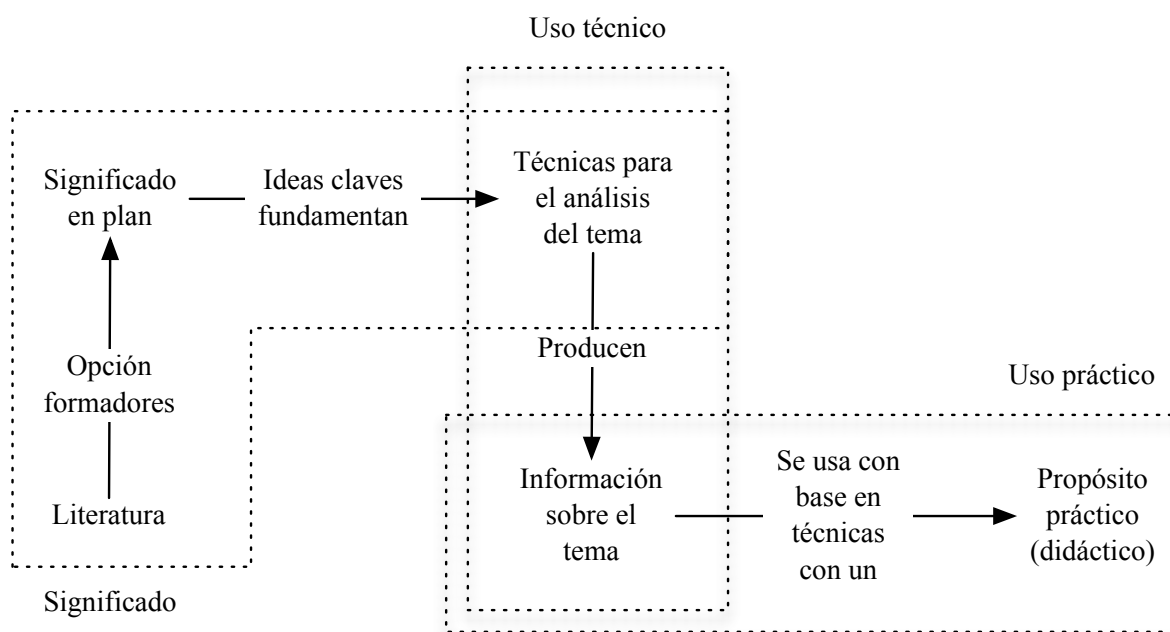


Figura *. Significado, uso técnico y uso práctico

Cómo aprenden los profesores en formación

El significado, el uso técnico y el uso práctico articulan un marco que permite explorar y caracterizar el aprendizaje de un organizador del currículo. Nosotros hemos indagado estas cuestiones analizando las manifestaciones de profesores en formación cuando realizan el análisis didáctico de un tema. Concretamente, hemos buscado qué tipo de secuenciación se da entre los tres tipos de conocimiento durante un proceso de formación (González y Gómez, En preparación).

Se podría pensar que los profesores en formación deben primero desarrollar el significado del organizador del currículo, para después ponerlo en juego en el análisis del tema y utilizar la información que surge en otros análisis. No obstante, las indagaciones preliminares que hemos hecho nos muestran que este proceso “canónico” sucede rara vez en la práctica (Gómez, 2007; González y Gómez, 2008, En preparación). El aprendizaje de un organizador del currículo es un proceso dinámico en el que los profesores en formación desarrollan de una manera simultánea e interdependiente su significado, uso técnico y uso práctico (ver figura *). Estos tres aspectos del aprendizaje de un organizador del currículo se informan unos a otros. No es cuestión de aprender la teoría para después usarla en la práctica. La teoría —el significado de un organizador del currículo— se aprende y adquiere sentido en la práctica; y la práctica—el uso técnico y el uso práctico de un organizador del currículo— progresa en la medida en que se comprende la teoría. El uso técnico de un organizador del currículo promueve el desarrollo de su significado. El uso práctico da lugar a la revisión de las técnicas del uso técnico y de la información que se produce con ellas, junto con nuevos desarrollos de su significado. El desarrollo simultáneo e interdependiente de los tres tipos de conocimiento de un organizador del currículo se encuentra en la base de algunas de las pautas para el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas que abordamos a continuación.

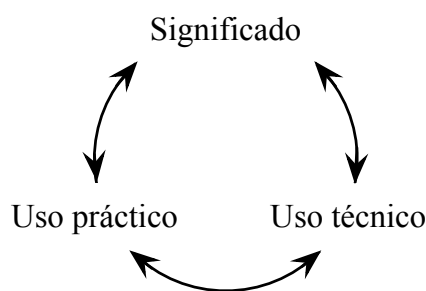


Figura *. Desarrollo simultáneo e interdependiente de significado, uso técnico y uso práctico

ENSEÑAR ANÁLISIS DIDÁCTICO. DISEÑO DE PROGRAMAS

En este apartado, establecemos algunas ideas que pueden guiar el diseño de programas formación basados en el modelo del análisis didáctico. En el siguiente apartado, describiremos cómo hemos puesto en práctica estas ideas en el diseño de un programa particular de formación. Abordamos la problemática del diseño de programas atendiendo a las dimensiones del currículo: expectativas de aprendizaje, contenidos, metodología y evaluación.

Expectativas de aprendizaje

Los programas que se basan en el modelo del análisis didáctico buscan contribuir al desarrollo de las competencias del profesor para planificar, llevar a la práctica y evaluar su actuación en el aula, para un tema concreto de las matemáticas escolares. Se busca que el profesor desarrolle su conocimiento didáctico, como aquel conocimiento que le permite realizar el análisis didáctico de un tema y que puede activar en su práctica diaria. El modelo atiende, por tanto, a la formación para la planificación e implementación de un contenido matemático concreto, aunque no atiende otros ámbitos de actuación, como pueden ser el diseño curricular global de una asignatura u otras actividades no curriculares del profesor. Las expectativas de aprendizaje tienen en cuenta que el conocimiento didáctico es una amalgama de conocimiento teórico, técnico y práctico. Esta característica del conocimiento didáctico, como expectativa de aprendizaje, orienta el contenido, la metodología y la evaluación de los programas.

Contenido

La estructura del análisis didáctico sugiere una forma natural de organizar el contenido de los programas de formación. Esta es la función principal del análisis didáctico en el diseño de programas de formación que describimos a continuación.

El inicio de un ciclo del análisis didáctico supone que el profesor conoce el contexto en el que trabaja. Por lo tanto, los programas de formación se inician con una contextualización curricular teórica y práctica. Esta contextualización se basa en la introducción de la noción de currículo y la puesta en juego de esa noción para describir y analizar la realidad curricular del contexto en el que tiene lugar el plan de formación y su comparación con realidades curriculares de otros contextos.

Una vez que se ha realizado la contextualización, los contenidos del programa siguen, de manera secuencial, la lógica de los cuatro análisis del análisis didáctico: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Esta lógica se basa en la idea de que, dentro de este orden, la realización de uno de los análisis requiere de la información que surge de los análisis pre-

vios (Gómez, 2002). Por ejemplo, para realizar el análisis de instrucción se requiere la información que surge del análisis de contenido y del análisis cognitivo. No obstante, es importante destacar el carácter dinámico e interdependiente de los análisis. Al profundizar en un análisis intermedio, el profesor en formación puede generar información que de lugar a reformular o complementar la información que ha producido en análisis previos. Este carácter dinámico de los análisis debe ser tenido en cuenta en el diseño e implementación de los programas, puesto que se debe promover que los profesores en formación revisen sistemática y periódicamente los análisis que han realizado previamente.

Al interior de cada análisis, el contenido se organiza de acuerdo con los organizadores del currículo que lo configuran. En este caso, el orden de presentación no está completamente determinado. Por ejemplo, el análisis de contenido se puede comenzar ya sea por la estructura conceptual o por los sistemas de representación. No obstante, resulta claro que, por ejemplo, las hipótesis de aprendizaje se han de trabajar después de haber analizado el tema en términos de expectativas y limitaciones de aprendizaje.

Los formadores encargados del diseño del programa deben, de las posibilidades disponibles en la literatura, escoger una opción para el significado de cada organizador del currículo. Ese será el significado de la noción que se espera que los profesores en formación desarrollen en el plan de formación. Los formadores deberán basarse en las ideas clave que caracterizan ese significado para diseñar y seleccionar las técnicas que propondrán dentro del plan de formación para el uso técnico y el uso práctico de cada organizador del currículo. Estas técnicas no pueden determinarse y ejemplificarse a priori. Esto se debe a varias razones. En primer lugar, la formalización de la idea de técnica en el análisis didáctico es reciente. En nuestros diseños e implementaciones previos, los formadores de planes basados en el análisis didáctico insinuábamos algunas técnicas al presentar en clase el análisis de un tema y dejábamos a la iniciativa de los profesores en formación el diseño y puesta en juego de sus propias técnicas. En segundo lugar, las técnicas para un organizador del currículo dependen de la opción que los formadores a cargo del programa hayan seleccionado para su significado. Por consiguiente, diferentes opciones de significado para un organizador del currículo darán lugar a técnicas diferentes. Y, en tercer lugar, las técnicas que los formadores seleccionan y proponen dependen del contexto en que se realiza el plan de formación. Por ejemplo, estas técnicas se deben adaptar al conocimiento y experiencia de los profesores en formación, lo que da lugar a técnicas diferentes dependiendo de si el programa forma futuros profesores o profesores en ejercicio.

Metodología

Las reflexiones que hemos presentado sobre el aprendizaje de los profesores en formación dan lugar a unas pautas para la organización del aprendizaje en este tipo de programas. Estas pautas —que presentamos en seguida— tienen como propósito promover el desarrollo de las expectativas de aprendizaje. Nuestra experiencia con este tipo de programas, las investigaciones que hemos realizado hasta el momento, el carácter teórico, técnico y práctico del conocimiento didáctico, y la forma simultánea e interdependiente en la que se desarrollan, sugieren la conveniencia de organizar a los profesores en formación en grupos de trabajo y promover un entorno de trabajo que favorezca la participación y la construcción social del aprendizaje. Dada la relación que existe entre los organizadores del currículo y entre los análisis del análisis didáctico, resulta también oportuno que cada grupo trabaje a lo largo de todo

el programa de formación sobre un mismo tema de las matemáticas escolares. Consideramos que los profesores en formación aprenden

1. al poner en práctica los organizadores del currículo para analizar un tema matemático concreto;
2. al trabajar a lo largo de todo el programa sobre un mismo tema de las matemáticas escolares;
3. al trabajar en grupo y tener que llegar a acuerdos, con motivo de la obligación de presentar los resultados de su trabajo a sus compañeros;
4. al tener que contribuir individualmente al trabajo del grupo;
5. al reaccionar sistemática y periódicamente a los comentarios de los tutores y los formadores a los borradores y las versiones finales de sus trabajos;
6. al observar el trabajo de otros grupos sobre temas matemáticos diferentes, pero usando el mismo organizador del currículo;
7. al tener que comentar y criticar el trabajo de otros grupos; y
8. al tener que presentar un trabajo final que recoja la experiencia global e identifique sus fortalezas y debilidades, con el propósito de mejorarla.

Nuestra experiencia y algunas de las investigaciones que hemos realizado (Gómez, 2007) muestran que estas pautas metodológicas promueven el interés y el compromiso de los profesores en formación y los grupos por el trabajo que deben realizar y contribuyen al desarrollo de su conocimiento didáctico. Dentro de estas pautas hay algunas cuestiones que vale la pena resaltar para lograr estos objetivos. En primer lugar, el análisis de un tema que un grupo de profesores en formación realice con un organizador del currículo difícilmente se puede considerar terminado. Los organizadores del currículo son herramientas de análisis que permiten profundizar tanto como se desee en cada tema. Al realizar las tareas profesionales que se les solicitan, los grupos tienen la sensación de que, con más tiempo disponible, habrían podido mejorar su trabajo. Esta situación da lugar a que compañeros, formadores y tutores puedan contribuir a las producciones de los grupos. En segundo lugar, al tener que presentar su trabajo ante sus compañeros, en una circunstancia que promueve la interacción y el aprendizaje interdependiente (Gómez y Rico, 2007), se genera una situación de competencia positiva en la que los grupos pueden darse cuenta, por ellos mismos, de la calidad —comparativa— del trabajo que han realizado. Ellos pueden reconocer las fortalezas y debilidades de su trabajo y del de los demás grupos, para incorporar nuevas ideas en el suyo. En tercer lugar, la interacción con los compañeros y los tutores alrededor de los borradores de cada trabajo resulta trascendental. En particular, hemos constatado que el aprendizaje de los grupos depende fuertemente de la interacción que tienen con sus tutores (Gómez, 2007; Gómez y Cañadas, 2011). Dada su relación con la evaluación formativa, profundizamos en este asunto a continuación.

Evaluación

Nos centramos en la evaluación formativa de los programas de formación. Como hemos resaltado en el apartado anterior, los estudiantes y los grupos aprenden al abordar tareas profesionales que involucran los organizadores del currículo y al interactuar con compañeros, formadores y tutores en la realización de esas tareas. La interacción con formadores y tutores

configura entonces una parte importante de los procesos de evaluación. Esta interacción tiene lugar usualmente en cinco ámbitos del diseño metodológico del programa:

1. En clase, cuando el formador introduce el organizador del currículo y los estudiantes y los grupos realizan ejercicios relacionados con su tema u otro tema.
2. Durante el tiempo en el que los grupos trabajan produciendo borradores o versiones finales del análisis de su tema con un organizador del currículo.
3. En las reacciones formales de formadores y tutores a los borradores y versiones finales del trabajo de los grupos.
4. En la discusión que tiene lugar cuando los grupos presentan su trabajo a los demás grupos.
5. En la producción y revisión del documento final.

En todos estos ámbitos tiene lugar el mismo proceso: los grupos tienen una tarea que deben realizar y para la que deben presentar un resultado; los grupos producen propuestas de solución a la tarea; y los formadores y tutores estudian estas propuestas y reaccionan a ellas. La actuación de formadores y tutores es naturalmente variada en forma y contenido. Formadores y tutores pueden constatar cuestiones que consideran relevantes del trabajo de los grupos; sugerir cambios o estrategias para mejorar el trabajo; complementar o aclarar información; o valorar el trabajo de los grupos (Arias y Gómez, 2011). No obstante, esta actuación se concreta en un propósito central: aprovechar la tarea profesional para contribuir al aprendizaje de los estudiantes y los grupos a través de promover el desarrollo del significado, el uso técnico y el uso práctico de los organizadores del currículo.

La evaluación sumativa del aprendizaje de los organizadores del currículo tiene como referentes el significado y las técnicas para el uso técnico y el uso práctico que los formadores seleccionan y proponen durante la instrucción. Esto es lo que se espera que los profesores en formación aprendan sobre el organizador del currículo. Los profesores en formación pueden también crear técnicas propias que los formadores deben valorar desde la perspectiva de su eficacia y eficiencia para producir información sobre el tema analizado o de su relevancia para la planificación.

El uso práctico juega un papel central en la evaluación del diseño de la unidad didáctica. Como lo mencionamos anteriormente, se espera que los profesores en formación puedan justificar ese diseño en términos de su relevancia, eficacia y eficiencia y verificar la calidad del diseño en la práctica, de cara a mejorarlo.

MAD¹. EJEMPLO DEL DISEÑO DE UN PROGRAMA

Hemos puesto en práctica estas ideas para el diseño de un programa de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. Describimos en este apartado sus características principales. En Gómez et al. (2010), Gómez y Restrepo (2010) y Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE) (2011) se encuentran descripciones más detalladas de este programa.

¹ “Máster en Análisis Didáctico”. Utilizamos esta abreviatura para referirnos a la “concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación del Centro de investigación y Formación en Educación de la Universidad de los Andes”.

MAD es un programa de maestría de profundización, en el contexto de la maestría en educación de la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia). En él participan formadores de la Universidad de los Andes y de las universidades españolas de Almería, Cantabria y Granada. Está enfocado a profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, tiene una duración de dos años y centra su atención en la autonomía que los profesores colombianos tienen para diseñar y desarrollar el currículo (Gómez y Restrepo, 2011; Restrepo y Gómez, 2011).

Expectativas de aprendizaje

El programa busca contribuir al desarrollo, por parte de los profesores en formación, de sus competencias de planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas. Los objetivos del programa siguen las pautas presentadas en el apartado anterior. El programa pretende contribuir al desarrollo del conocimiento didáctico de los profesores en formación al proporcionarles oportunidades para que, al realizar un ciclo de análisis didáctico, puedan

- ◆ avanzar en la constatación y la comprensión de la complejidad inherente a las matemáticas escolares,
- ◆ identificar y organizar los múltiples significados del tema,
- ◆ hacer una previsión de las actuaciones de los escolares al abordar tareas,
- ◆ diseñar una unidad didáctica,
- ◆ diseñar los instrumentos de observación que permitan evaluar el aprendizaje y la enseñanza,
- ◆ implementar el diseño curricular propuesto en su centro,
- ◆ evaluar la relevancia y eficacia de la planificación realizada y
- ◆ producir un informe sobre la experiencia.

Contenido

El programa consta de ocho módulos distribuidos en cuatro semestres. El contenido de cada módulo se refiere, ya sea, a un análisis o aspecto del análisis didáctico, o al análisis de la implementación de la unidad didáctica. En el primer módulo se trabaja sobre la noción de currículo. Los siguientes cuatro módulos abordan los cuatro análisis del análisis didáctico. Por ejemplo, en el módulo de análisis cognitivo, se consideran, como organizadores del currículo, las nociones de expectativas, limitaciones e hipótesis de aprendizaje. El análisis de los datos recogidos durante la implementación de la unidad didáctica y la organización de sus resultados se trabaja en los módulos 6 y 7. En el último módulo, los grupos producen el informe final de su trabajo.

Metodología

La metodología de MAD sigue las pautas que presentamos en el apartado anterior. El programa tiene una duración de cuatro semestres. En cada semestre se cursan dos módulos consecutivos y cada módulo tiene una duración de nueve semanas. Los profesores en formación se organizan en grupos de 4 o 5 personas. Cada grupo trabaja en un tema matemático concreto². Cada grupo tiene asignado un tutor que lo acompaña a lo largo de todo el programa. Su función es comentar el trabajo del grupo guiándolo en cada una de las actividades. Los gru-

² En la promoción 2010-2011 los temas fueron números enteros, noción de variable, sistemas de ecuaciones lineales y funciones trigonométricas.

pos reciben también el apoyo permanente del coordinador local quien está a cargo de la gestión del programa. Los temas se seleccionan en función de las asignaturas que los profesores en formación esperan dictar en el segundo año, con el fin de llevar a la práctica su propuesta de diseño curricular. Cada grupo realiza un ciclo de análisis didáctico sobre su tema a lo largo de los dos años del programa. Al final de los primeros cinco módulos, los grupos producen un diseño de la unidad didáctica. Los tres últimos módulos se centran en la implementación de la unidad didáctica, la recolección y análisis de la información con motivo de esta implementación y la producción del informe de la experiencia global.

Cada módulo se configura alrededor de cuatro actividades en las que los grupos interactúan con formadores y tutores en la realización de su trabajo. Al final de la primera semana de la actividad cada grupo produce un borrador de su trabajo. Este borrador es comentado por el tutor del grupo. Con base en esos comentarios, al final de la segunda semana de la actividad, el grupo produce la versión final de su documento y realiza una presentación de 10 minutos a todos sus compañeros y al coordinador local. Los formadores y tutores españoles pueden asistir virtualmente a estas presentaciones o ver posteriormente el video de las mismas. Por su parte, una semana después de la presentación, cada estudiante introduce en un foro virtual sus comentarios y críticas al trabajo del grupo —diferente del suyo— que le ha sido asignado.

Evaluación

Adicionalmente al comentario del borrador, el tutor produce, para cada actividad, un comentario de evaluación del borrador y de la presentación de su grupo. Cada grupo recibe, al final de la actividad, estos comentarios, junto con los comentarios del coordinador local, y los comentarios y la nota asignada por el formador encargado del módulo. Este documento y la interacción entre el tutor y el grupo, constituyen la base de la evaluación formativa dentro del programa.

La evaluación sumativa de los grupos en cada actividad tiene en cuenta los siguientes aspectos:

- ◆ borrador de la actividad,
- ◆ documento final sobre la actividad y
- ◆ presentación de la actividad al grupo de clase y los formadores.

La evaluación individual tiene en cuenta la evaluación del grupo para las cuatro actividades del módulo, junto con los comentarios individuales del estudiante al trabajo del grupo que tiene asignado para cada una de las actividades.

DISCUSIÓN

En este capítulo nos propusimos abordar la problemática del diseño de programas de formación de profesores de matemáticas basados en el modelo del análisis didáctico. Este tipo de reflexión es relevante en España, como consecuencia del propósito de mejorar la formación matemática de los escolares. También es relevante en países latinoamericanos como Colombia en los que, además de la preocupación por el aprendizaje de los escolares, las políticas de autonomía curricular revierten en el profesor la mayor parte de las responsabilidades de diseño y desarrollo curricular. Abordamos esta problemática con base en dos fundamentos: una reflexión sobre las principales características del análisis didáctico en el contexto de la for-

mación de profesores y una conceptualización parcial de los procesos de aprendizaje que tienen lugar en programas de formación basados en el modelo del análisis didáctico. En la reflexión sobre el análisis didáctico profundizamos en la caracterización de la noción de organizador del currículo. Esto nos permitió establecer los tres tipos de conocimiento que se espera que los profesores en formación desarrollen en los planes de formación. Esta conceptualización nos llevó a destacar el papel de las técnicas del uso técnico y el uso práctico en la enseñanza y a establecer el conocimiento didáctico como amalgama de conocimiento teórico, técnico y práctico. Con base en estas ideas y en una posición socio-cultural del aprendizaje, propusimos unas pautas para el diseño de planes de formación, que ejemplificamos con un programa específico.

La mayoría de los estudios que se han hecho sobre el aprendizaje de los profesores en formación en programas basados en el análisis didáctico se han centrado sobre todo en el desarrollo del significado de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación y en el papel del diseño curricular de los programas en ese aprendizaje. Es necesario comenzar a indagar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las técnicas del uso técnico y el uso práctico y su relación con el desarrollo del significado de los organizadores del currículo. Este tipo de indagación proporcionará información valiosa para la evaluación y revisión del diseño e implementación de los programas de formación.

REFERENCIAS

- Arias, M. y Gómez, P. (2011). *Actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1771/>
- Aristóteles. (1984). *Ética a Nicómaco* (P. S. Abril, Trad.). Barcelona, España: Ediciones Orbis.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Back, S. (2002). The Aristotelian challenge to teacher education. *History of Intellectual Culture*, 2(1), 2-4.
- CIFE. (2011). *MAD: maestría en Educación Matemática*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://is.gd/DD9936>
- Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 6, 139-163.
- Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 6, 165-196.
- Flyvbjerg, B. (2006). Making organization research matter: power, values, and phronesis. En S. R. Clegg, C. Hardy, T. B. Lawrence y W. R. Nord (Eds.), *The Sage handbook of organization studies* (2nd edition ed., pp. 370- 387). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la*

- didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante, España: Universidad de Alicante. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/370/>
- Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno y J. L. Lupiáñez (Eds.), *X Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (pp. 73-95). Granada, España: SAEM 'Thales' y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/385/>
- Gómez, P. (2006). *Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Huesca, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1278/>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- Gómez, P. (2011). *Entrevista a los estudiantes de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(Especial), 78-89.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/646/>
- Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/418/>
- Gómez, P. y González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 223-235. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/431/>
- Gómez, P. y Restrepo, A. (2011). *Procesos de planificación en matemáticas y autonomía escolar*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1592/>
- Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/644/>
- Gómez, P. y Rico, L. (2007). Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education. *PNA*, 2(1), 17-28. Disponible en <http://www.pna.es>
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1211/>
- González, M. J. y Gómez, P. (En preparación). Conceptualizing and exploring teachers' learning of pedagogical concepts.

- González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L., et al. (2006). Relevancia de planes de formación inicial de profesores de matemáticas. *PNA*, 1(1), 3-20. Disponible en <http://cumbia2.local/pna/paginapna/Numeros2/pdf/Gonzalez2006Relevancia.pdf>
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ice - Horsori.
- Restrepo, A. y Gómez, P. (2011). *Planes de área en matemáticas y autonomía escolar: un estudio de casos*. Trabajo presentado en III Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ice - Horsori.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/533/>
- Saugstad, T. (2005). Aristotle's contribution to scholastic and non-scholastic learning theories. *Pedagogy, Culture & Society*, 13(3), 347-366.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University.